



II CAIM 2010
Segundo Congreso Argentino
de Ingeniería Mecánica
San Juan - Noviembre 2010

Determinación del exponente " n " de endurecimiento por deformación mediante un algoritmo de mínimos cuadrados ponderados

Ariel Matusevich^(1,2), Reinaldo Mancini⁽²⁾, Julio Massa⁽¹⁾

⁽¹⁾ *Departamento de Estructuras, Facultad de C. E. F. y N., Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, (5000) Córdoba, Argentina. e-mail: ariel.matusevich@gmail.com*

⁽²⁾ *Laboratorio de Ensayos Mecánicos, Instituto Nacional de Tecnología Industrial, Centro Regional Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1561, 5000 Córdoba, Argentina, rmancini@inti.gov.ar*

RESUMEN

En este trabajo se propone una nueva metodología para la determinación del exponente n de endurecimiento por deformación en metales dúctiles. Dicho exponente surge de la representación empírica de la curva de tensión verdadera versus deformación verdadera $\sigma_v = K (\epsilon_v)^n$, válida mientras el material se deforma sin un cambio apreciable de volumen.

La porción de interés de la curva σ_v - ϵ_v se puede obtener transformando los datos de tensión ingenieril versus deformación ingenieril (σ - ϵ) resultantes de un ensayo de tracción. Luego, el exponente n se calcula mediante el ajuste por mínimos cuadrados de la recta $\ln(\sigma_v) = \ln(K) + n \ln(\epsilon_v)$.

La norma ASTM 646, que establece el método de ensayo para la determinación del exponente n , utiliza el método de mínimos cuadrados convencional para el ajuste de dicha recta (modelo de regresión lineal simple). Esta metodología asume que las abscisas están exentas de error, lo cual no es correcto.

En este trabajo se propone utilizar el algoritmo de mínimos cuadrados ponderados WTLS (Weighted Total Least Squares) que considera errores tanto en ordenadas como en abscisas. Utilizando curvas de ensayo reales, se comparan los valores obtenidos para el exponente n y para su desviación estándar mediante ambas técnicas de ajuste. La metodología propuesta ha sido incorporada como una función en el software INcerTI, desarrollado recientemente para el cálculo de parámetros e incertidumbres en el ensayo de tracción.

Palabras Claves: exponente n , embutido, tracción, mínimos cuadrados.

1. ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN

Una representación empírica de la curva tensión verdadera (σ_v) versus deformación verdadera (ϵ_v) para muchos metales está dada por la siguiente expresión [1]:

$$\sigma_v = K (\epsilon_v)^n \quad (1)$$

donde los parámetros K y n se conocen como coeficiente de resistencia y exponente de endurecimiento por deformación, respectivamente. La ecuación (1) es válida mientras el material se deforma sin un cambio apreciable de volumen.

El exponente n es una propiedad relacionada con la capacidad de estiramiento de un metal durante un proceso de conformado. Mientras más grande es este valor menor es la tendencia del material a causar deformaciones localizadas, lo que posibilita un mejor conformado. También brinda una medida del incremento de la resistencia del material debido a la deformación plástica. Los valores de n para metales dúctiles a temperatura ambiente varían generalmente entre 0,02 y 0,5 [1]. Valores típicos de los parámetros K y n para diferentes metales pueden encontrarse en [2].

Tomando logaritmos a ambos miembros de la ecuación (1)

$$\ln(\sigma_v) = \ln(K \epsilon_v^n) \quad \rightarrow \quad \ln(\sigma_v) = \ln(K) + n \ln(\epsilon_v) \quad (2)$$

y haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} y &= \ln(\sigma_v) \\ x &= \ln(\epsilon_v) \end{aligned} \quad (3)$$

se aprecia que la ecuación (2) representa una recta $y = a + bx$, con ordenada al origen $a = \ln(K)$ y pendiente $b = n$. Por lo tanto, los parámetros K y n pueden obtenerse mediante una regresión lineal de la curva $y-x$. Dicho ajuste se realiza usualmente mediante el método de mínimos cuadrados convencional [3], tal como se indica en la norma ASTM E 646 [4]. Sin embargo, la utilización de esta técnica de ajuste implica asumir que se cumplen ciertos requisitos. Uno de estos requisitos es la ausencia de errores en los datos de abscisas, lo cual no es correcto. Por esta razón, en este trabajo se propone utilizar un algoritmo de mínimos cuadrados ponderados, conocido como WTLS (Weighted Total Least Squares) [5], que considera errores en ambas variables. La metodología propuesta ha sido incorporada como una función en el software INcerTI [6], que utiliza el Laboratorio de Ensayos Mecánicos de INTI-Córdoba [7].

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se desarrollan las expresiones que permiten transformar la zona de deformación plástica uniforme de la curva ingenieril ($\sigma-\epsilon$) en valores verdaderos ($\sigma_v-\epsilon_v$). En la sección 3 se expone, en forma resumida, la metodología que brinda la norma ASTM 646 para la determinación del exponente n . En la sección 4 se presenta el método de cálculo propuesto. En la sección 5, utilizando curvas de ensayo reales, se muestran los resultados que se obtienen calculando el exponente n y su desviación estándar mediante el método estándar y la metodología propuesta. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos y se exponen las conclusiones del trabajo.

2. CURVA DE TENSIÓN VERDADERA VERSUS DEFORMACIÓN VERDADERA

La curva de tensión ingenieril versus deformación ingenieril resultante de un ensayo de tracción no brinda una información verdadera acerca de las características de deformación de un material, ya que la misma está basada en las dimensiones iniciales de la probeta (L_e y S_0) y éstas varían continuamente durante el ensayo. Usar la tensión verdadera $\sigma_v = P/S$ en lugar de la tensión ingenieril $\sigma = P/S_0$ brinda una medida más directa acerca de la respuesta plástica del material. A continuación se explica como obtener los valores verdaderos de tensión y deformación $\sigma_v - \varepsilon_v$, partiendo de datos ingenieriles $\sigma - \varepsilon$.

Si se considera que un incremento de deformación puede tomarse como un aumento incremental en el desplazamiento dL dividido por la longitud instantánea L , la deformación real ε_v resulta

$$d\varepsilon_v = \frac{dL}{L} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_v = \int_{L_e}^L \frac{1}{L} dL = \ln(L) - \ln(L_e) = \ln \frac{L}{L_e} \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que $L = L_e + e$, siendo ' L_e ' la longitud inicial del extensómetro utilizado y ' e ' la elongación ingenieril, se tiene

$$\varepsilon_v = \ln \frac{L}{L_e} = \ln \left(\frac{L_e + e}{L_e} \right) \quad (5)$$

Durante la fluencia y el régimen plástico subsiguiente, el material se deforma sin un cambio apreciable de volumen, es decir, un aumento en la longitud de la probeta es compensado con una disminución del área de la sección transversal. Antes de producirse el fenómeno de estricción, cuando la deformación todavía permanece uniforme a lo largo de la probeta, la constancia de volumen implica

$$dV = 0 \quad \rightarrow \quad SL = S_0 L_e \quad \rightarrow \quad \frac{S}{S_0} = \frac{L_e}{L} \quad (6)$$

De la ecuación (6) se obtiene la siguiente expresión para la sección instantánea de la probeta:

$$S = S_0 \frac{L_e}{L} = S_0 \frac{L_e}{L_e + e} = S_0 \left(\frac{L_e + e}{L_e} \right)^{-1} \quad (7)$$

De esta manera, la tensión verdadera resulta

$$\sigma_v = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} \left(\frac{L_e + e}{L_e} \right) \quad \rightarrow \quad \sigma_v = \sigma \left(\frac{L_e + e}{L_e} \right) \quad (8)$$

Las expresiones (5) y (8) permiten obtener la curva tensión real versus deformación real en función de los valores de tensión y deformación referidos a las dimensiones iniciales de la probeta. Estas fórmulas no deben aplicarse en porciones de la curva donde se presentan discontinuidades (fenómeno de fluencia discontinua) y dejan de ser válidas cuando comienza a producirse la estricción, es decir, en el momento en que se registra la tensión máxima.

3. OBTENCIÓN DEL EXPONENTE DE ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN SEGÚN ASTM 646

El ensayo consiste en someter a una probeta de dimensiones normalizadas a un ensayo de tracción convencional. De la curva $\sigma - \varepsilon$ resultante, se elige un tramo continuo y monótono creciente de la región plástica; típicamente, dicho tramo corresponde a rangos de deformación de 5-10 % ó 15-20 %. Luego, los datos $\sigma - \varepsilon$ seleccionados se transforman en valores $\sigma_v - \varepsilon_v$ mediante las expresiones (8) y (5). Finalmente, mediante regresión lineal simple de la ecuación (2) se determinan n , K y las desviaciones estándar de dichos parámetros.

4. CÁLCULO MEDIANTE UN ALGORITMO DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS

Para que sea válida la utilización del método de mínimos cuadrados convencional (regresión lineal simple) deben cumplirse fundamentalmente tres requisitos:

1. Que no exista correlación entre ordenadas y abscisas.
2. Que los valores de las abscisas se encuentren exentas de error.
3. Que el error asociado a la variable dependiente (ordenada) se encuentre normalmente distribuido con media cero y varianza uniforme.

Si los requisitos (2) y (3) no se cumplen, debe aplicarse otro método de ajuste. Una alternativa es utilizar un método de mínimos cuadrados ponderados que posea requisitos de aplicación más amplios.

En este trabajo se propone usar el algoritmo WTLS (Weighted Total Least Squares), desarrollado recientemente por Krystek y Anton [5]. Dicho método es válido en casos donde las ordenadas y abscisas tienen errores normalmente distribuidos, con varianza que puede ser uniforme o no.

Mediante dicho método se obtienen los parámetros de la recta a ajustar, mediante la minimización numérica de la siguiente función:

$$X^2 = \sum_{k=1}^n \left[\frac{(x_k - X_k)^2}{u_{x,k}^2} + \frac{(y_k - Y_k)^2}{u_{y,k}^2} \right] \quad (9)$$

donde (y_k, x_k) denotan n pares de datos con incertidumbres estándar $(u_{y,k}, u_{x,k})$ e (Y_k, X_k) son los valores de datos por la predicción.

Los factores de ponderación o pesos son función de las incertidumbres estándar de los puntos experimentales y por lo tanto, la eficacia del método radica en estimar correctamente dichas incertidumbres.

4.1 Determinación de las incertidumbres estándar asociadas a las variables x e y

Las puntos x e y de la recta a ajustar están dados por las siguientes expresiones:

$$x = \ln(\varepsilon_v) = \ln \left[\ln \left(\frac{L_e + e}{L_e} \right) \right] \quad y = \ln(\sigma_v) = \ln \left[\frac{F}{S_0} \left(\frac{L_e + e}{L_e} \right) \right] \quad (10)$$

Aplicando la ley de propagación de los errores [3], las incertidumbres en x e y están dadas por

$$u_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial e} u_e \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial L_e} u_{L_e} \right)^2} \quad u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial e} u_e \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L_e} u_{L_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial F} u_F \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial S_0} u_{S_0} \right)^2} \quad (11)$$

Las derivadas parciales indicadas en (11) están dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial x}{\partial e} = \frac{1}{(L_e + e) \ln\left(\frac{L_e + e}{L_e}\right)} \quad \frac{\partial x}{\partial L_e} = \frac{-e}{L_e(L_e + e) \ln\left(\frac{L_e + e}{L_e}\right)} \quad (12)$$

$$\frac{\partial y}{\partial e} = \frac{1}{L_e + e} \quad \frac{\partial y}{\partial L_e} = \frac{-e}{L_e(L_e + e)} \quad \frac{\partial y}{\partial S_0} = \frac{-1}{S_0} \quad \frac{\partial y}{\partial F} = \frac{1}{F} \quad (13)$$

A continuación se describe como determinar las incertidumbres parciales indicadas en (11), siguiendo los lineamientos de la guía para expresión de incertidumbres de medición [8].

4.1.1 Incertidumbre en la medición del desplazamiento

La incertidumbre en la medición del desplazamiento se obtiene del certificado de calibración del extensómetro utilizado. En dicho certificado, la incertidumbre se encuentra tabulada para diferentes rangos de desplazamiento.

4.1.2 Incertidumbre en la medición de la longitud inicial del extensómetro

Asumiendo, en forma conservadora, un error de 0,5 % de la longitud inicial del extensómetro, se puede adoptar el siguiente valor para la incertidumbre de L_e :

$$u_{L_e} = \frac{0,005 L_e}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

donde se ha considerado una distribución de probabilidad uniforme.

4.1.3 Incertidumbre en la medición de la carga

La incertidumbre estándar en la medición de las fuerzas está tabulada para distintos rangos de cargas en el certificado de calibración de la celda de carga utilizada

$$u_{F_c} = \frac{U_F}{k_F} \quad (15)$$

donde U_F es la incertidumbre expandida de calibración de la celda de carga y k_F es el factor de cobertura utilizado en el informe de calibración.

4.1.4 Incertidumbre en la medición del área de la sección transversal inicial de la probeta

Las probetas utilizadas en el ensayo son de sección transversal rectangular [4]. El proceso de medición del área de la sección transversal de la probeta implica medir el ancho y el espesor de la misma utilizando instrumentos de medición apropiados y en base a estas medidas, efectuar el cálculo del área. Existen fuentes de incertidumbre de carácter aleatorio asociadas a las mediciones del ancho y del espesor de la probeta y componentes sistemáticas provenientes de las calibraciones de los instrumentos utilizados.

5. EJEMPLOS DE ANÁLISIS

En esta sección se muestran los resultados de tres ensayos correspondientes a un acero de utilización en procesos de embutido. Las tres probetas ensayadas, designadas como A, B y C, fueron obtenidas a 0, 45 y 90 grados respecto a la dirección de laminación del material. En la Tabla 1 se listan las medidas de las secciones transversales de las probetas conjuntamente con las desviaciones estándar asociadas.

Tabla 1: Medidas de las secciones transversales de las probetas ensayadas

Designación de la probeta	Ancho: $b \pm u_b$ [mm]	Espesor: $t \pm u_t$ [mm]	Área: $S_0 \pm u_{S_0}$ [mm ²]
A (0° - Longitudinal)	12,48 ± 0,02	1,056 ± 0,002	13,18 ± 0,03
B (45° - Diagonal)	12,51 ± 0,02	1,057 ± 0,002	13,22 ± 0,03
C (90° - Transversal)	12,50 ± 0,02	1,039 ± 0,002	12,99 ± 0,03

En la Figura 1 se muestran las curvas σ - ϵ , correspondientes a los ensayos de tracción realizados sobre las probetas A, B y C. Los resultados para las probetas A y B son bastante similares, mientras que el comportamiento de la probeta C es algo diferente aunque las diferencias son pequeñas.

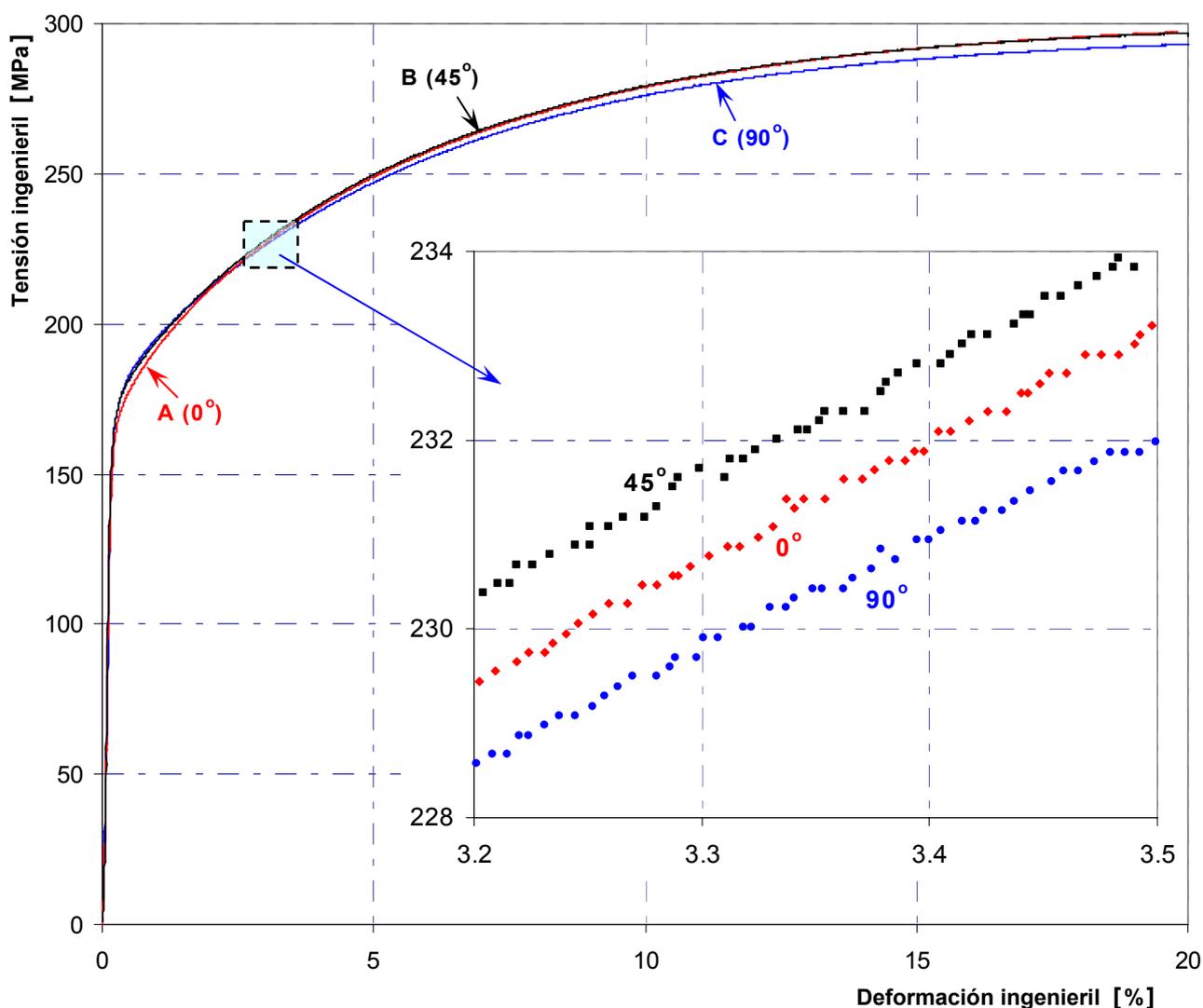


Figura 1: Curvas tensión-deformación de los ensayos de tracción realizados para determinar el exponente n

El número de puntos experimentales registrados en un ensayo depende de la velocidad de deformación y de la frecuencia de adquisición de datos seleccionada, en general las máquinas modernas registran típicamente entre mil y tres mil valores de carga y elongación. Dichos puntos experimentales poseen dispersión, por lo que su tratamiento debe basarse en fundamentos estadísticos sólidos. De manera “informal” se habla de la “curva” carga versus elongación, pero en realidad se tienen registros de dos series temporales correspondientes a la elongación y la carga que debido a la aleatoriedad no son monótonas crecientes ni aún en el período lineal.

A modo de ejemplo, en la Figura 1 se hizo una ampliación de una zona del gráfico para mostrar en detalle que se trata de puntos discretos de carácter aleatorio obtenidos en ensayos. En la zona ampliada cada curva contiene aproximadamente 50 puntos, y para todo el gráfico se tienen aproximadamente 3000 puntos para cada curva.

En la Figura 2, donde se muestran las curvas $\ln(\sigma_v)$ versus $\ln(\epsilon_v)$ para los probetas A, B y C, se puede verificar la validez de la relación empírica (1), ya que se observa una relación prácticamente lineal entre las variables $\ln(\sigma_v)$ y $\ln(\epsilon_v)$. El gráfico corresponde a deformaciones verdaderas en el rango $[-3 < \ln(\epsilon_v) < -2]$, o sea entre el 5 y el 13,5 %. El rango para las ordenadas graficadas $[5,55 < \ln(\sigma_v) < 5,8]$ está asociado a tensiones verdaderas entre 257 y 330 MPa.

Nuevamente en la Figura 2 se hizo una ampliación de una zona del gráfico para mostrar la distribución aleatoria de los resultados del ensayo en el caso de las tensiones y deformaciones “verdaderas”. La tendencia “lineal” resulta evidente en los tres casos, cuando se usan escalas logarítmicas.

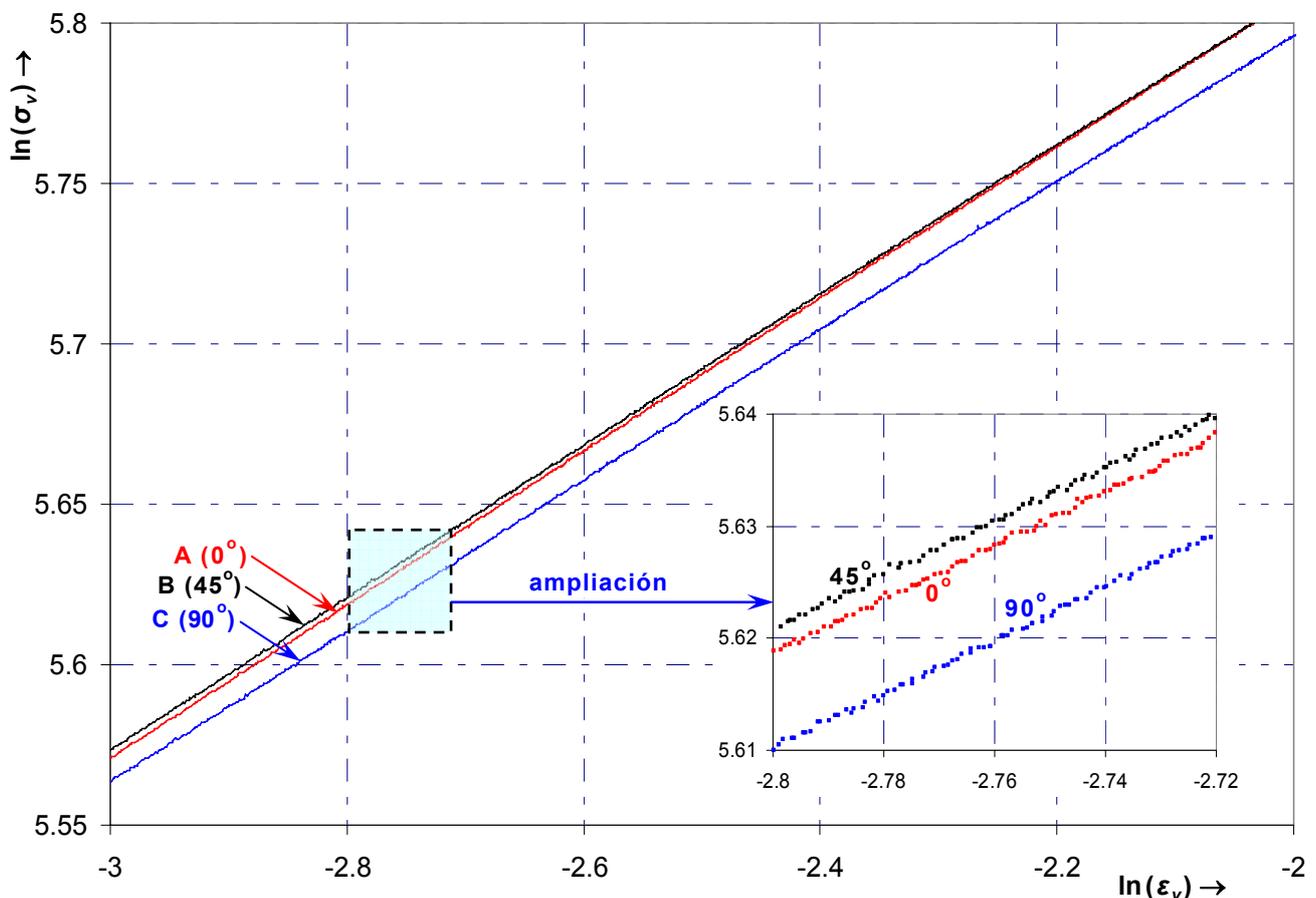


Figura 2: Curvas $\ln(\sigma_v)$ versus $\ln(\epsilon_v)$ para los ensayos A, B y C (rango de deformación 5 al 13,5 %)

La Tabla 2 contiene los resultados para el exponente n y su desviación estándar, obtenidos mediante el método de mínimos cuadrados convencional. En la Tabla 3 se presentan los resultados que brinda el método de mínimos cuadrados ponderados (WTLS).

Tabla 2: Resultados para el exponente n y su desviación estándar (mínimos cuadrados estándar)

Designación de la probeta	Exponente n	Desviación estándar	Desviación estándar %	Rango de deformación	Número de puntos
A (0° - Longitudinal)	0,237057	0,000042	0,02	5 al 15 %	1498
B (45° - Diagonal)	0,234470	0,000051	0,02	5 al 15 %	1487
C (90°- Transversal)	0,232666	0,000052	0,02	5 al 15 %	1487

Tabla 3: Resultados para el exponente n y su desviación estándar (mínimos cuadrados ponderados)

Designación de la probeta	Exponente n	Desviación estándar	Desviación estándar %	Rango de deformación	Número de puntos
A (0° - Longitudinal)	0,237047	0,000230	0,10	5 al 15 %	1498
B (45° - Diagonal)	0,234458	0,000219	0,09	5 al 15 %	1487
C (90°- Transversal)	0,232658	0,000254	0,11	5 al 15 %	1487

Con el fin de comparar ambos métodos, los resultados en las Tablas 2 y 3 se han expresado con 6 cifras decimales. La cantidad correcta de cifras significativas con que debe informarse el resultado de una medición depende de la estimación de la incertidumbre asociada [3, 4]. Si se utiliza el criterio de informar la desviación estándar con una sola cifra significativa, los resultados deben expresarse tal como se indica en la Tabla 4. El método convencional, al asumir que la variable x carece de error, aparenta ser más exacto que el algoritmo de mínimos cuadrados ponderados, lo cual no es correcto.

Tabla 4: Resultados informados con las cifras significativas que imponen las desviaciones estándar correspondientes

Designación de la probeta	Exponente n (método estándar)	Exponente n (algoritmo WTLS)
A (0° - Longitudinal)	0,23706 ± 0,00004	0,2371 ± 0,0002
B (45° - Diagonal)	0,23447 ± 0,00005	0,2345 ± 0,0002
C (90°- Transversal)	0,23267 ± 0,00005	0,2327 ± 0,0002

Los resultados obtenidos para el exponente de endurecimiento por deformación (n) muestran que las propiedades para el proceso de embutido son mejores en el sentido longitudinal ($n_0 \cong 0,237$) y se van degradando levemente para ángulos crecientes ($n_{45} \cong 0,235$ y $n_{90} \cong 0,233$) siendo mínimas en el sentido transversal (probeta C).

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los resultados presentados en las Tablas 2 y 3 muestran que existe una plena concordancia entre ambos métodos de ajuste en lo referente al cálculo del exponente n . Sin embargo, no sucede lo mismo en el caso de las desviaciones estándar asociadas a los parámetros calculados.

Las desviaciones estándar obtenidas con el método de mínimos cuadrados convencional son de un orden de magnitud menor que las obtenidas con el algoritmo WTLS, y esto crea una expectativa de falsa "exactitud" en el valor calculado para el exponente n de endurecimiento por deformación.

En conclusión, el algoritmo WTLS brinda una estimación más realista de la desviación estándar asociada al parámetro n y por lo tanto, permite informar el parámetro calculado con una cantidad correcta de cifras significativas. El mérito del método propuesto es que reconoce la dispersión de los valores medidos (tanto en 'x' como en 'y') y pone al descubierto que el método convencional subestima la dispersión al no considerar a 'x' como variable aleatoria.

7. REFERENCIAS

- [1] G. Dieter, *Mechanical Metallurgy*, McGraw-Hill, New York, 1986.
- [2] Metals Handbook Volume 8 (Ninth Edition), American Society for Metals, 1988.
- [3] A. Maiztegui, J. Gleiser, *Mediciones de Laboratorio*, Taller Gráfico de José Solsona, 2000.
- [4] ASTM E 646, *Standard Test Method for Tensile Strain-Hardening Exponents (n – Values) of Metallic Sheet Materials*, 2007.
- [5] M. Krystek, M. Anton, A Weighted Total Least Squares Algorithm for Fitting a Straight Line, *Measurement Science Technology*, vol.18, pp. 3438–3442, 2007.
- [6] A. Matusevich, R. Mancini, J. Massa, *Desarrollo de un postprocesador de datos experimentales para estimar parámetros e incertidumbres en el ensayo de tracción*, *Memorias del Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica - CAIM*, 2008.
- [7] Instituto Nacional de Tecnología Industrial – Centro Regional Córdoba, <http://www.inti.gob.ar/cordoba/>.
- [8] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, Geneva, Switzerland. ISBN 92-67-10188-9, First Edition, 1993.